حساب التكامل

I- تعريف

f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصران من I.

لتكن F و G دالتين أصليتين للدالة f على I.

نعلم أن : $\exists c \in IR / \forall x \in I : G(x) = F(x) + c$

إذن : $G(b) - G(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$

وبالتالي العدد $F(b) - F(a)$ غير مرتبط بالدالة الأصلية للدالة f .

هذا العدد يسمى تكامل f من a إلى b ونرمز له ب: $\int_a^b f(x)dx$ يقرأ تكامل من a إلى b ل $f(x)dx$

أمثلة : * لنحسب: $\int_1^3 x^2 dx$

لدينا الدالة $f : x \mapsto x^2$ دالة متصلة على IR ودالة أصلية لها هي: $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$

إذن $\int_1^3 x^2 dx = F(3) - F(1) = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

* لنحسب: $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$

لدينا الدالة $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ دالة متصلة على IR^{-*} ودالة أصلية لها هي: $F : x \mapsto \frac{-1}{x}$

إذن $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = F(-1) - F(-2) = \frac{-1}{(-1)} - \frac{-1}{(-2)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

II- خاصيات

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b و c عناصر من I

لدينا:

* $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$

* $\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$

* $\boxed{\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$

* $\boxed{\forall \lambda \in IR : \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx}$

* $\boxed{\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx}$ (علاقة شال)

أمثلة :

* لنحسب التكامل: $I = \int_1^2 (3x^2 - \frac{2}{x})dx$

لدينا الدوال : $f : x \mapsto x^2$ و $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ دوال متصلة على $[1,2]$.

و دوالها الأصلية هي على التوالي: $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + c$ و $G : x \mapsto \ln x + c'$

إذن: $I = \int_1^2 (3x^2 - \frac{2}{x})dx = \left[3\frac{x^3}{3} - 2\ln x\right]_1^2 = 8 - 2\ln 2 - 1 = 7 - 2\ln 2$

* لنحسب التكامل $J = \int_{-4}^{2} |x^2 + 2x - 3| dx$

لنحدد أولا إشارة $x^2 + 2x - 3$ على المجال $[-4,2]$

x	-4		-3		1		2
x^2+2x-3		+	0	-	0	+	

إذن: $J = \int_{-4}^{2} |x^2 + 2x - 3| dx = \int_{-4}^{-3} (x^2 + 2x - 3)dx + \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)dx + \int_{1}^{2} (x^2 + 2x - 3)dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_{-4}^{-3} - \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_{-3}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{-27}{3} + 9 + 9 - (\frac{-64}{3} + 16 + 12) - (\frac{1}{3} + 1 - 3 - (\frac{-27}{3} + 9 + 9)) + (\frac{8}{3} + 4 - 6 - (\frac{1}{3} + 1 - 3))$$

$$= 9 + \frac{64}{3} - 28 - \frac{28}{3} + 20 + \frac{7}{3} = 1 + \frac{43}{3} = \frac{46}{3}$$

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصر من I

نعتبر التطبيق المعرف على I ب: $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$

لتكن f دالة أصلية ل f على I لدينا: $\varphi(x) = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$

إذن φ أيضا دالة أصلية للدالة f على I

خاصية

> لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I.
> الدالة المعرفة على I ب: $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في a

مثال: $\forall x \in IR^{+*} : \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

لأن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على IR^{+*} التي تنعدم في النقطة 1 هي الدالة $\ln$.

تأويل هندسي لتكامل دالة متصلة وموجبة على مجال $[a,b]$:

لتكن f دالة متصلة وموجبة على مجال $[a,b]$ مع $a \prec b$

نعمل في المعلم المتعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ ونضع : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ و $\vec{j} = \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{IK}$

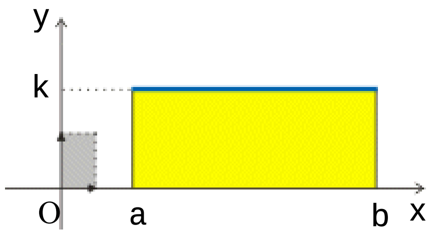
وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$

نعتبر الحيز المستوي المحصور بين المنحنى ومحور الأفاصيل و المستقيمين $x=a$ و $x=b$:

$\Delta(f)=\{M(x,y)\in(P)/a\le x\le b\ ;\ 0\le y\le f(x)\}$

نرمز لمساحة هذا الحيز ب: $A(f)$

<u>إذا كانت</u> f <u>دالة ثابتة على المجال</u> $[a,b]$: $f(x)=k$

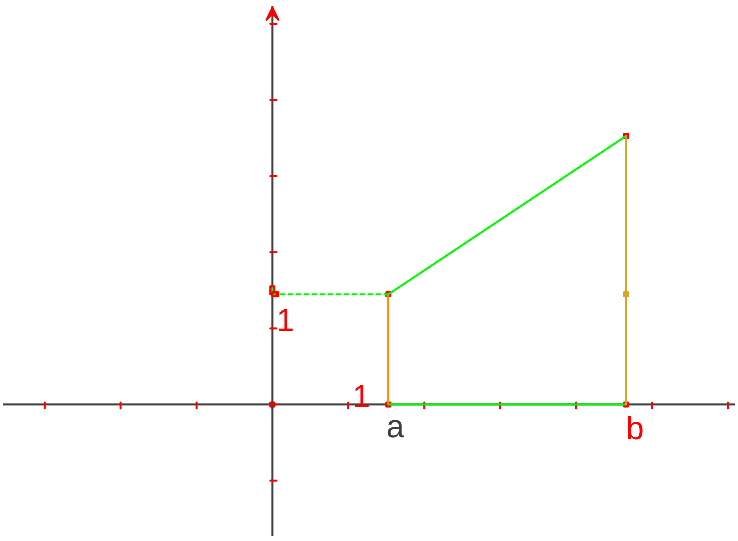


$\Delta(f)$ عبارة عن مستطيل بعداه: k و $b-a$ إذن : $A(f)=k.(b-a)=kb-ka$

من جهة أخرى دالة أصلية ل f هي: $F(x)=k.x$ إذن $\int_a^b f(t)dt=[k.t]_a^b=k.b-k.a$

وبالتالي : $\boxed{A(f)=\int_a^b f(x)dx}$

إذا كانت f <u>دالة تآلفية</u> : $f(x)=cx+d$



$\Delta(f)$ عبارة عن شبه منحرف قياس ارتفاعه $b-a$ وقياسا قاعدتيه $ca+d$ و $cb+d$ إذن :

$$A(f)=\frac{1}{2}(b-a)(ca+d+cb+d)=(\frac{1}{2}cb^2+db)-(\frac{1}{2}ca^2+da)$$

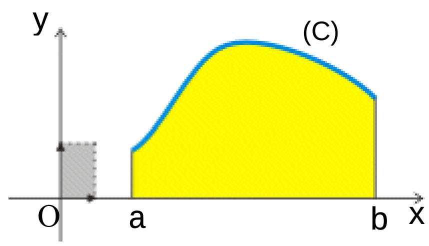
من جهة أخرى دالة أصلية ل f هي : $F(x)=\frac{1}{2}c.x^2+dx$ إذن

$$\int_a^b f(t)dt=\left[\frac{1}{2}c.t^2+dt\right]_a^b=\frac{1}{2}c.b^2+db-(\frac{1}{2}c.a^2+da)$$

وبالتالي : $\boxed{A(f)=\int_a^b f(x)dx}$

ونقبل الخاصية التالية :

<u>خاصية</u>



المستوى منسوب لمعلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ f دالة متصلة وموجبة على المجال $[a,b]$ مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) ومحور الأفاصيل والمستقيمين : $x=a$ و $x=b$ هي : $\int_a^b f(t)dt$ بوحدة المساحة

III- تقنيات حساب التكامل

1- استعمال دالة أصلية

أمثلة :

- لنحسب التكامل: $I=\int_1^e \frac{\ln t}{t}dt$

نعتبر الدالة $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ لدينا : $f(x)=(\ln x).(\ln' x)$ إذن دالة أصلية ل f هي : $F(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$

ومنه : $I=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\frac{1}{2}[(\ln e)^2-0]=\frac{1}{2}$

* لنحسب التكامل: $J=\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dt$

نعتبر الدالة $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ لدينا : $f(x)=u(x)^{-2}.u'(x)$ حيث: $u(x)=1+e^x$.إذن دالة أصلية ل f هي :

$F(x)=-(u(x))^{-1}=\frac{-1}{1+e^x}$

ومنه : $J=\left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^1=-[\frac{1}{1+e}-\frac{1}{2}]=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e}=\frac{e-1}{e+1}$

* لنحسب التكامل $k=\int_1^2 \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x}dx$

نعتبر الدالة الجذرية : $f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x}$

بعد انجاز القسمة الاقليدية نجد: $f(x)=x+\frac{x+1}{x^2+x}=x+\frac{1}{x}$

إذن دالة أصلية للدالة f هي : $F(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x$ وبالتالي:

$$k=\left[\frac{1}{2}x^2+\ln x\right]_1^2=\frac{1}{2}.4+\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\ln 2$$

2- التكامل بالأجزاء

f و g دالتين متصلتين وقابلتين للاشتقاق على المجال $[a,b]$

نعلم أن : $\forall x\in[a,b]:(f.g)'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

إذن: $\forall x\in[a,b]: f'(x).g(x)=(f.g)'(x)-f(x).g'(x)$

إذا كانت f' و g' متصلتين على المجال $[a,b]$ فإن:

$$\boxed{\int_a^b f'(x).g(x)dx=[f(x).g(x)]_a^b-\int_a^b f(x).g'(x)dx}$$

هذه العملية تسمى تكاملا بالأجزاء أو مكاملة بالأجزاء.

أمثلة:

- **لنحسب التكامل** $\int_1^e x.\ln x dx$

لذلك نضع: $f'(x)=x$ و $g(x)=\ln x$ و $f(x)=\frac{x^2}{2}$ و $g'(x)=\frac{1}{x}$

إذن:

$$\int_1^e x.\ln x dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x.dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{e^2+1}{4}$$

* **لنحسب:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin(2x)dx$

نضع لذلك: $f'(x)=\sin(2x)$ و $g(x)=x$ و $f(x)=\frac{-1}{2}\cos(2x)$ و $g'(x)=1$

إذن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)dx=\left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\cos(2x)dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

3- التكامل بتغيير المتغير

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ بحيث تكون g' دالة متصلة على $[a,b]$

لتكن f دالة متصلة على المجال I بحيث $g([a,b])\subset I$

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I فإن: $\forall x\in[a,b]:(F\circ g)'(x)=f(g(x)).g'(x)$

إذن:

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx=\left[F\circ g(x)\right]_a^b=F(g(b))-f(g(a))=\left[F(x)\right]_{g(a)}^{g(b)}=\int_{g(a)}^{g(b)}f(x)dx$$

خاصية (طريقة تغيير المتغير)

g دالة قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ بحيث تكون g' دالة متصلة على $[a,b]$

و f دالة متصلة على المجال I بحيث: $g([a,b])\subset I$.

لدينا:

$$\boxed{\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)}f(t)dt}$$

ملاحظة: إذا وضعنا $g(x)=t$ فإن: $dt=g'(x)dx$ و $\begin{cases}x=a\Rightarrow t=g(a)\\ x=b\Rightarrow t=g(b)\end{cases}$

أمثلة:

* لنحسب التكامل $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

نضع: $x=\cos t$ حيث: $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لدينا $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$ و $x=1\Rightarrow t=0$

و $dx=-\sin t.dt$ إذن التكامل يصبح:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1-\cos^2 t}.(-\sin t)dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}sin^2t.dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos(2t)).dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

* **لنحسب التكامل:** $I=\int_{-1}^{2}\frac{1}{4x^2-4x+10}dx$

لدينا:

$$4x^2-4x+10=4(x^2-x)+10=4((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4})+10=4(x-\frac{1}{2})^2+9=9\left[\frac{4}{9}(x-\frac{1}{2})^2+1\right]=9\left[(\frac{2x-1}{3})^2+1\right]$$

نضع: $t=\frac{2x-1}{3}$ أي $x=\frac{3t+1}{2}$

لدينا : $x=-1\Rightarrow t=-1$ و $x=2\Rightarrow t=1$ و $\frac{1}{4x^2-4x+10}=\frac{1}{9(t^2+1)}$

و $dx=\frac{3}{2}dt$

إذن التكامل يصبح : $I=\int_{-1}^{1}\frac{\frac{3}{2}dt}{9(1+t^2)}=\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{6}\left[Arc\tan t\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{6}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{12}$

التكامل والترتيب:

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a,b]$ $(a\le b)$

نعلم انه : إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a,b]$ فان:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

وبما أن $F'=f$ فان:

إذا كانت f موجبة على $[a,b]$ **فان الدالة F تكون تزايدية على $[a,b]$**

إذن $F(b)-F(a)\ge 0$

خاصية

تكامل دالة موجبة على مجال $[a,b]$ **حيث:** $(a\le b)$ **هو عدد موجب**

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a,b]$ **حيث:** $(a\le b)$

إذا كانت $f\le g$ **على** $[a,b]$ **فان الدالة $g-f$ تكون موجبة على** $[a,b]$

إذن $\int_a^b (g-f)(x)dx\ge 0$ **وبالتالي :** $\int_a^b g(x)dx\ge\int_a^b f(x)dx$

خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a,b]$ **حيث:** $(a\le b)$
إذا كان لدينا $f\le g$ **على** $[a,b]$ **فان:** $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

خاصية

من الخاصيات السابقة نستنتج أنه : اذا كانت الدالة f سالبة على المجال $[a,b]$ **حيث:** $(a\le b)$

فان : $\int_a^b f(x)dx\le 0$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$$

إذا كانت M هي القيمة القصوية للدالة f على $[a,b]$

و m هي القيمة الدنوية للدالة f على $[a,b]$ **فان:** $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

القيمة المتوسطة لدالة متصلة على قطعة

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a,b]$

إذن الدالة تقبل قيمة قصوية M وقيمة دنوية m على المجال $[a,b]$

إذن: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

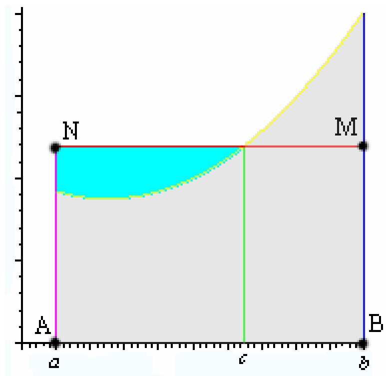
وبالتالي : $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$

وحسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد $c \in [a,b]$ بحيث: $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

تعريف

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a,b]$

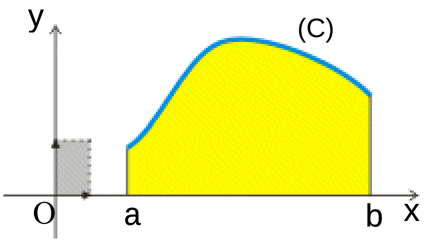
العدد الحقيقي $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a,b]$



خاصية

يوجد $c \in [a,b]$ بحيث : $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

تطبيقات حساب التكامل



1- حساب المساحات

المساحة الجبرية

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$

المساحة الجبرية للدالة f على المجال $[a,b]$ هي العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x)dx$

المساحة الهندسية :

المساحة الهندسية للدالة f على المجال $[a,b]$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى C_f ومحور

الأفاصيل و المستقيمين : $x=a$ و $x=b$

*إذا كانت الدالة f موجبة على المجال $[a,b]$ فانه حسب فقرة سابقة المساحة

هي: $\int_a^b f(x)dx$ بوحدة المساحة التي سنرمز لها ب: $u.a$

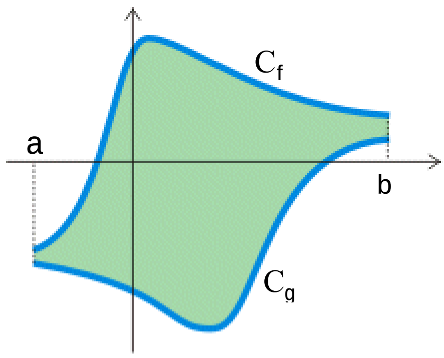
* إذا كانت f سالبة على المجال $[a,b]$ فان المساحة هي: $-\int_a^b f(x)dx$ أي: $\int_a^b |f(x)|dx$

* **إذا كانت الدالة f تغير الإشارة على المجال** $[a,b]$ فانه لتحديد المساحة نقسم المجال $[a,b]$ إلى مجالات تكون فيها إشارة الدالة f ثابتة ثم نطبق النتائج السابقة.

مساحة حيز مستوى محصور بين منحنيين

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a,b]$.

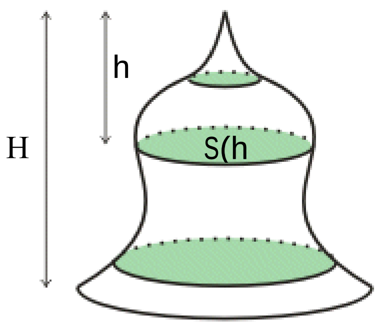
مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنيين C_f و C_g هو العدد : $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة



2- حساب الحجوم

حجم مجسم الدوران الذي طول ارتفاعه H والذي تقاطعه مع مستوى معادلته $z=h$ هو دائرة مساحتها $S(h)$

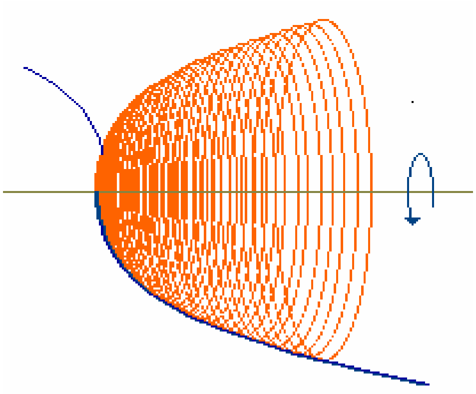
هو : $V=\int_0^H S(h).dh$



نعتبر دالة f متصلة على مجال $[a,b]$

C_f هو منحناها في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر المجسم المحدد بإجراء دورة كاملة للمنحنى C_f حول محور الأفاصيل في المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

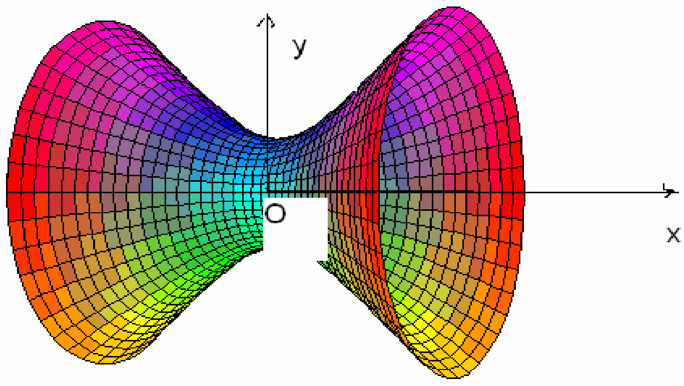


ليكن $x \in [a,b]$. dV هو حجم الاسطوانة التي قاعدتها عبارة عن قرص شعاعه $f(x)$ وارتفاعه dx

لدينا : $dV = \pi.(f(x))^2.dx$

إذن حجم المجسم هو : $\boxed{V = \int_a^b dV = \int_a^b \pi.(f(x))^2.dx}$

والحجم يحسب بوحدة الحجوم التي هي حجم متوازي المستطيلات المنشئ على $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$.


y
O
x